Artículos

Un mundo caótico

J.J.P. Veerman
Departamento de Matemáticas. Universidad de Barcelona. Gran Vía 585, 08007, Barcelona (*)

M.V. Fonseca
Departamento de Física Atómica y Astrofísica. Universidad Complutense, 28040 Madrid
(Recibido 4-diciembre-1987)

Abstract

An introduction to the discipline named "Dynamical Systems" is given in this article. It deals with the behavior of deterministic processes that create non predictible or chaotic phenomena. The main goal is to retrieve information about future states of a system from a given set of initial conditions. The appearance of chaos improses limits to the prediction. Tiny differences in input could quickly become overwhelming differences in output.

Resumen

En este artículo, los autores describen la disciplina llamada Sistemas Dinámicos, que trata de estudiar el comportamiento de procesos determinísticos que, sin embargo, dan lugar a fenómenos impredicibles o caóticos.
El problema fundamental de esta disciplina consiste en calcular estados futuros del sistema a partir de condiciones iniciales dadas. La aparición de caos impone límites a la predicción, pequeñísimas diferencias en la precisión de las condiciones iniciales dan lugar rápidamente a comportamientos muy diferentes.

Predicción y ciencia

El poder de la ciencia reside en gran parte en su capacidad de predicción. Un experimento da el mismo resultado tanto hoy como mañana (si se repite el experimento sin cambios). Eclipses de sol pueden ser previstos miles de años antes de que ocurran. Por otro lado, como la misma causa tiene los mismos efectos, inferimos de la predictibilidad una causa común. Experimentos que siempre dan el mismo resultado, deben de tener una causa común. Esto es otro factor decisivo para el poder de la ciencia: nos permite simplificar una gran variedad de fenómenos, reduciéndolos a su causa común.

Todo esto parece muy lógico. Pero, entre otras cosas, el razonamiento anterior supone que la predicción cuantitativa de un fenómeno, dada su causa, siempre es posible. Desgraciadamente, no es así. Este artículo describe las dificultades de la predicción cuantitativa a partir de un modelo matemático. No consideramos la diferencia entre la causa y el modelo para no complicar la exposición. Tampoco consideramos, por la misma razón, posibles aspectos cuánticos en las ideas expuestas a continuación.

Casi todos los modelos matemáticos dan lugar a comportamiento irregular, que también se llama comportamiento caótico o simplemente "caos". El caos amplifica cada pequeña imprecisión. Por lo tanto hace imposible las predicciones a largo plazo. Esto no es artificio de nuestros modelos o de la matemática. Cualquiera puede convencerse de que muchos procesos comunes son irregulares. Ejemplos son el movimiento de una molécula de agua en un rápido, la aparición de burbujas en agua hirviendo, o el humo ascendente de un cigarro.

Sistemas dinámicos

De manera simplificada, por un sistema dinámico se entiende casi todo lo que se mueve y que se puede describir matemáticamente. Más precisamente, se puede decir, que es un sistema cuyos estados posibles se pueden describir matemáticamente y cuya evolución en el tiempo es determi-

(*) Dirección actual: Physics Department. Box 75, Rockefeller University, 1230 York Av., 10021 New York, New York (U. S. A.).

nística. Es decir: su desarrollo es gobernado por reglas fijas y no por probabilidades.

Tirar una moneda al aire, para ver si sale cara o cruz, es un proceso probabilístico. La probabilidad de que salga cara o cruz es el cincuenta por ciento para cada caso. Este tipo de procesos no se consideran (normalmente) sistemas dinámicos.

Un ejemplo de un sistema dinámico es el de una pelota de tenis tirada desde la tierra hacia arriba. Dada la fuerza de la gravedad y dada la velocidad y la posición al principio, se puede determinar la altura en cada instante. En otras palabras: este problema tiene una solución. Esta categoría de modelos, que admiten una solución explícita (1) se llaman integrables.

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r - \frac{K}{2\pi} sen\ 2\pi\theta_n$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} - x + x^3 = \gamma\, sen\ (t)$$

Figura 1.– Ecuaciones

En el siglo XVII Newton fue el primero en darse cuenta de que podía resolver muchos problemas, cuando eran dadas la fuerza y las condiciones iniciales. El dedujo las leyes de Kepler a base de los principios de Galileo. Estas leyes describen el movimiento de un planeta alrededor del sol. Newton dio así un paso gigantesco en la historia de la ciencia. Era la primera predicción a base de un modelo matemático deducido de principios físicos. Newton, con pleno derecho, se ganó por tanto la reputación de ser uno de los padres de la ciencia moderna.

Newton también podía resolver el problema de dos cuerpos, porque su modelo era uno de aquellos problemas integrables. Sin embargo, no todo es tan fácil. En las últimas décadas hemos descubierto que casi todos los fenómenos *no* son de este tipo. Pueden parecerlo, a primera vista, pero al considerarlos mejor, resulta a menudo que son mucho más complicados. *No* es que todavía no sepamos cómo resolverlos, sino que *nunca* los podremos resolver de manera explícita. En el caso de la tierra que se mueve alrededor del sol, hay un tercer cuerpo, la luna, que supone una perturbación a este movimiento. En vez de dos cuerpos que ejercen una fuerza mutua el uno sobre el otro, como en el problema de Newton y Kepler, ahora hay tres cuerpos. El problema inmediatamente deja de ser sencillo (integrable), y hoy en día muchos científicos se dedican a su estudio. Precisamente, de este problema vienen las raíces históricas del estudio de sistemas dinámicos. Estos problemas, a veces llamados no-lineales, no admiten soluciones exactas, y, por tanto, solamente podemos estudiar algunos aspectos de ellas.

(1) Una solución explícita es una expresión matemática que da la posición al cabo de cualquier tiempo en términos de la posición inicial. La expresión a que nos referimos aquí debe ser de tal forma que da la posición final con la misma precisión, aproximadamente, que la precisión con que sabemos la posición inicial.

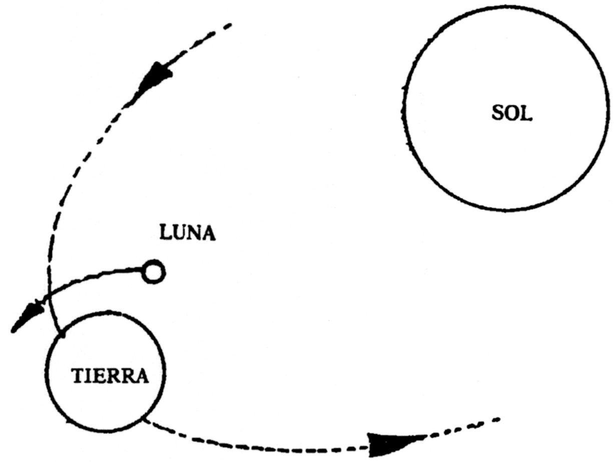

Figura 2.– El problema de tres cuerpos

No-lineal

¿Qué se puede hacer con problemas no-lineales? A primera vista parece, que hay que olvidar el tema e investigar otras cosas. Pero, desde luego, es imposible cerrar nuestros ojos ante fenómenos que realmente queremos entender. Muchos de ellos, además, son cotidianos. En vez de perder el coraje y caer en el desaliento, tenemos que investigar cuáles son las preguntas que sí podemos formular y estudiar.

Estas preguntas van a tener un carácter especial, ya que tienen como objeto la *complejidad de los procesos determinísticos*. Es notable, que la tecnología trate de minimizar los efectos de los procesos caóticos. Coches, aviones y televisores son construidos con partes, de tal manera que cada una de ellas, idealmente, aporta su propio aspecto ordenado al mecanismo entero. Pero esto es una idealización que supone que la acción de una parte no influye en la otra. Para comprender mejor esta idealización, hace falta que estudiemos los fenómenos reales que son complejos, no-lineales. Un ejemplo es el flujo turbulento (caótico) de un fluido o un gas.

Turbulencia ocurre, típicamente, a lo largo de las alas de un avión en vuelo. Flujos turbulentos también se pueden observar en cosas tan comunes como en un rápido de cualquier arroyo, o, en ausencia de viento, en el humo que se desprende de un cigarro encendido. El humo sube unos decímetros de manera regular, antes de que su movimiento se haga turbulento. El ejemplo más familiar de turbulencia, probablemente, es el comportamiento irregular de las corrientes de aire que constituyen el tiempo meteorológico.

Un modelo

Una de las herramientas importantes que tenemos a nuestra disposición es la simplificación. Se trata de estudiar los sistemas más sencillos, sin perder, desde luego, lo esencial: la complejidad de su comportamiento.

Uno de los modelos más sencillos, y el más conocido, que exhibe esta complejidad es un modelo que proviene de la biología de poblaciones. Este modelo describe el crecimiento de una población de un año para otro. Aquí la simplificación consiste en que no seguimos el tamaño de la población continuamente, sino que más bien estamos interesados solamente en el tamaño, digamos, el 15 de junio a las 4 de la mañana de cada año. En otras palabras, en vez de considerar el tiempo como continuo suponemos que es una serie de puntos separados (véase la figura 3). Este tipo de modelos se llaman modelos discretos.

Fig. 3a.– $X_2 = C. X_1 - C. X_1^2$

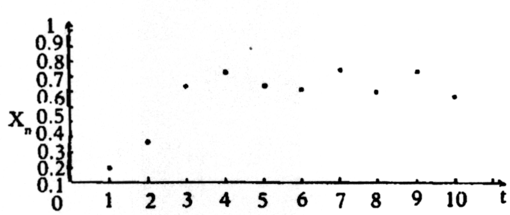

Figura 3b.– Orbita en el tiempo discreto

¿Cómo se puede hacer la predicción? Para obtener la población del próximo año, se aplica una sencilla regla (véase la figura 3) una sola vez. Como el modelo es determinístico, se aplica la misma regla una segunda vez para obtener la población del año siguiente, y así sucesivamente. Este acto repetitivo se llama iteración. Está claro que, para hacer una predicción para períodos largos de tiempo, tenemos que intentar entender, no sólo la regla misma, sino también cómo se comportan muchas iteraciones sucesivas de la regla.

La regla del modelo de la población es la siguiente. La letra '*x*' denota el tamaño de la población. La letra '*c*' que aparece en la ecuación es una constante que, por el momento, suponemos que tiene el valor 2. Si la población del primer año es x_1, entonces la del próximo año (x_2) tiene el valor: *c* veces el valor de la población en el primer año (x_1) menos *c* veces el valor de la población en el primer año (x_1) al cuadrado. Para obtener la población del tercer año, es decir x_3, se repite esta fórmula, ahora con la población del año corriente (que es la segunda, x_2). Así se puede obtener cada siguiente *x* de la *x* previa. En la figura 4 está dibujado cómo depende x_2 de x_1. La función no parece demasiado complicada. Resulta que, con esta *c*, el comportamiento es muy sencillo: los valores de *x* estarán cada vez más cerca de ½. Esto se puede verificar fácilmente con una calculadora de bolsillo.

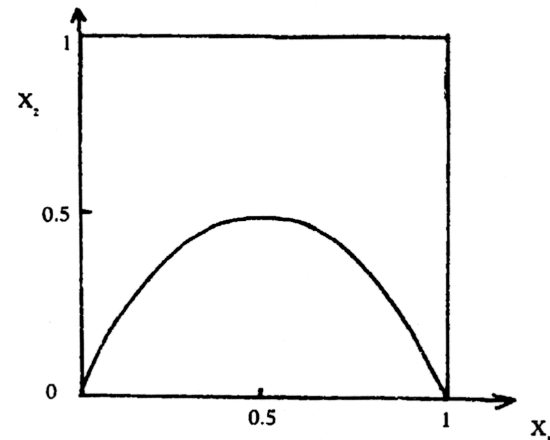

Figura 4.– X_2 versus X_1 para C = 2

Predecir o no

Vale la pena reflexionar un momento sobre lo anterior. Supongamos, que queremos predecir el valor de x_8, el valor de la población después de siete iteraciones. Nos encontramos en una situación ideal. Cada condición inicial x_1 dará un valor muy cerca de ½. En la figura 5 está dibujado cómo depende x_8 de x_1. Como los cálculos son repetitivos, éstos se pueden hacer fácilmente con un ordenador. La predicción es sencilla.

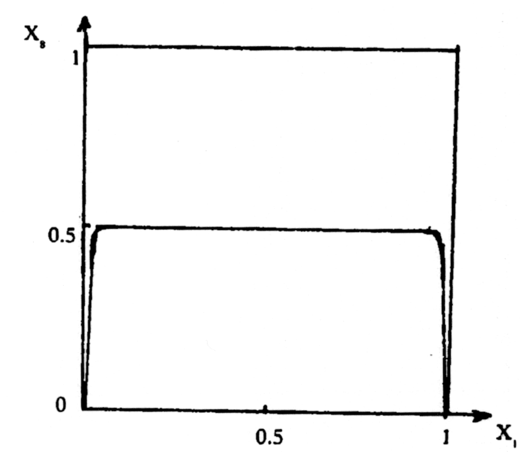

Figura 5.– X_8 versus X_1 para C = 2

Supongamos ahora que *c* es igual a 4. El valor de x_8 dependiendo de x_1 se puede calcular con un ordenador de la misma manera que anteriormente. En la figura 6a se ve que x_2 no cambia dramáticamente al cambiar *c* (compare con la figura 4). Lo

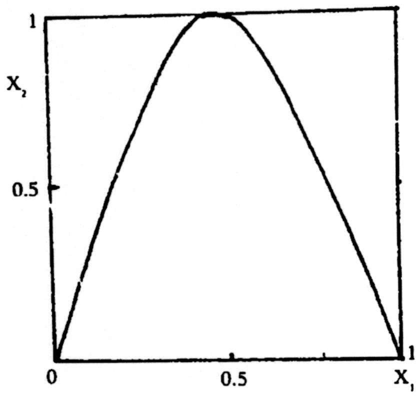

Figura 6a.– X_2 versus X_1 para C = 4

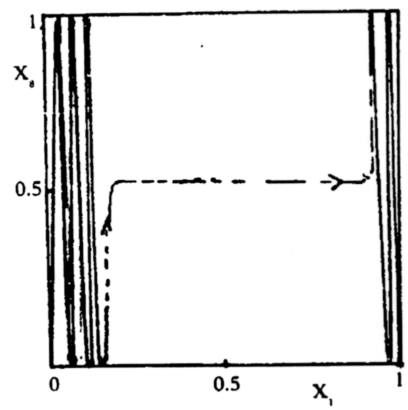

Figura 6b.– X_8 versus X_1 para C = 4

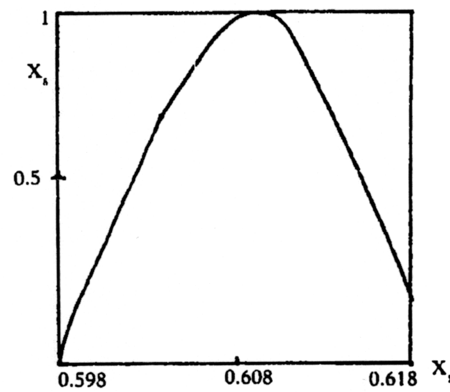

Figura 6c.– Ampliación de 6b

sorprendente es que el cambio de x_8 sí es dramático. De repente, para c igual a 4, el dibujo se retuerce y posee cientos de crestas y valles. Es importante darse cuenta de que, con relación a la figura anterior, tan sólo hemos cambiado el valor de la constante c. ¿De dónde vienen estos pliegues? ¿Aparecen todos a la vez para una cierta c? Quizás haya una serie de valores de c tal que para cada una de ellos aparezcan nuevos pliegues.

Es realista asumir que sabemos el valor de la población inicial con una precisión de, digamos, uno por cien. De las figuras 6a y 6b queda claro que los valores de x_1 en un pequeño intervalo de longitud, uno por cien, dan lugar a todos los posibles valores de x_8 entre cero y uno. En otras palabras, si conocíamos el valor de x_1 con una incertidumbre de uno por cien, entonces el valor de x_8 puede ser cualquiera entre cero y uno. Después de siete iteraciones hemos perdido todo el conocimiento inicial de x_1. Esto significa que sólo sabiendo x_1, no tenemos ninguna clave respecto al valor de la población x_8. Un error de uno por cien crece hasta el valor máximo de uno. La complejidad, entonces, aparece al hacer muchas iteraciones. Eso es, efectivamente, lo que hace imposible la predicción: es imposible saber la condición inicial con infinita precisión.

Resulta por tanto, que la constante c funciona como regulador de la aparición del caos. Como sugiere lo anterior, la transición de predictibilidad a caos ocurre en escalones sucesivos llamados bifurcaciones. Una bifurcación significa, que en el dibujo de x_8 aparecen pliegues nuevos que complican la predicción. Un ejemplo lo dan las figuras 7a y 7b. Para c alrededor de 3 se crean nuevos valles y crestas. Para c un poco más grande que 3, la población ya no llega a ser constante. Esta situación es una situación intermedia en cuanto a la predicción. No es tan confortable como la primera situación, pero tampoco tan desastrosa como la segunda. La transición al caos ocurre mediante una secuencia de estas bifurcaciones.

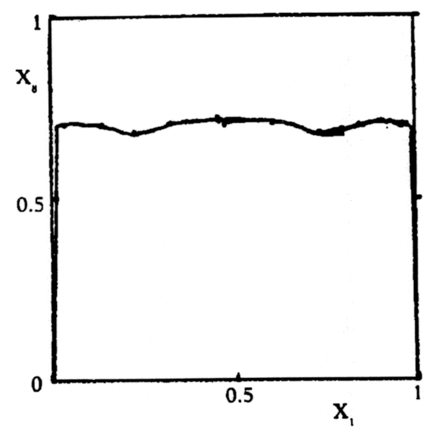

Figura 7a.– X_8 versus X_1 para C = 2.9

Hay una infinidad de bifurcaciones de este tipo, añadiendo complejidad al sistema, de modo que

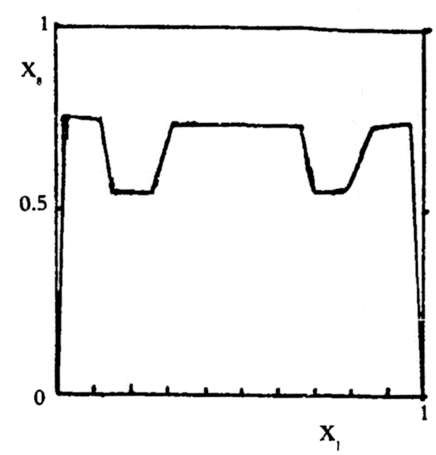

Figura 7b.– X_8 versus X_1 para C = 3.1

éste cada vez tiene soluciones más complicadas, hasta que, a más elevados valores de c, la solución es caótica. Con cada bifurcación disminuye la predictibilidad, cada vez necesitamos más precisión en x_1 para hacer la predicción de x_8.

Con cada bifurcación empieza un nuevo escalón en la transición al comportamiento caótico. Los valores de c donde empieza cada nuevo escalón, forman una secuencia muy especial, que está dibujada en la figura 8. Se puede ver que, después de un cambio de escala de c, esta secuencia parece la misma. La invariancia bajo un cierto cambio de escala (dilatación) es una propiedad que parece íntimamente conectada con la transición al caos.

Fig. 8a

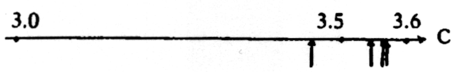

Fig. 8b

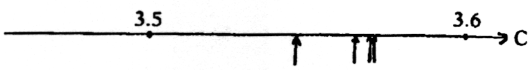

Figura 8a.– Los valores de C de las Bifurcaciones

Figura 8b.– Ampliación de 8a

Un poco de historia

La explicación de este fenómeno, por lo menos una explicación parcial, contiene elementos de matemática y de física. La descripción de las bifurcaciones es decididamente matemática. La manera en que éstas se acumulan, creando así una complejidad cada vez más grande, se puede entender (aunque no directamente probar) usando una idea de la física que se llama renormalización.

La renormalización se basa, muy brevemente, en la idea de que muchos fenómenos en la naturaleza parecen lo mismo después de un cambio de escala. Aumentando el dibujo, se obtiene el mismo dibujo. Esta propiedad se llama auto-similitud. Muchos fractales (véase la figura 9) son auto-similares.

El físico americano Feigenbaum y, un poco más tarde pero independientemente, los franceses Coullet y Tresser, abrieron camino en sistemas dinámicos, en el año 1978, con estas ideas. La fuerza de esta idea, una vez reconocida la auto-similitud, es, que reduce el problema a un problema de formas repetidas. En otras palabras, da lugar a geometría, antigua rama de la matemática. Como consecuencia tenemos mucha herramienta para describir y entender el fenómeno.

Aparte de su mérito científico, este descubrimiento fue también importante por razones más prosaicas. De sus cálculos se concluía que el paso de un sistema dinámico a comportamiento caótico, era un fenómeno que debería ocurrir en una clase muy amplia de sistemas. En el lenguaje científico se dice que es un fenómeno universal. Experimentadores como Libchaber y Maurer, de Francia, tardaron poco en revelar el comportamiento previsto en un experimento realizado con fluidos. (Semejante dispositivo utiliza ahora el experimentador Swinney para estudiar movimientos que se parecen a los de la mancha roja del planeta Júpiter).

Era la primera vez que gran parte de los especialistas en este campo (había muy pocos antes) se dieron cuenta de que los fenómenos de turbulencia, de comportamiento caótico estaban al alcance de la ciencia. Los gobiernos y las industrias empezaron a financiar investigaciones de este tipo.

Más dimensiones

El modelo que hemos visto es un modelo en una dimensión. Semejantes modelos se pueden estudiar en dos o más dimensiones. Matemáticamente estos modelos son muchísimo más difíciles. Más allá de dos dimensiones hay poca teoría, y el campo está todavía muy abierto para ideas nuevas. Una cosa evidente, sin embargo, es que, en más dimen-

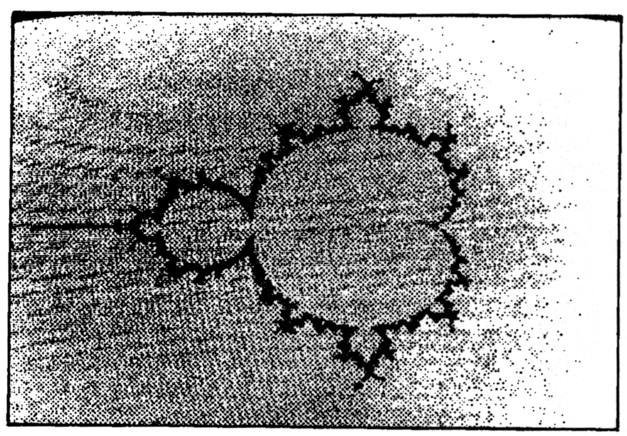

Figura 9a.– El conjunto de Mandelbrot

Figura 9b.– Ampliación de la parte de 9a

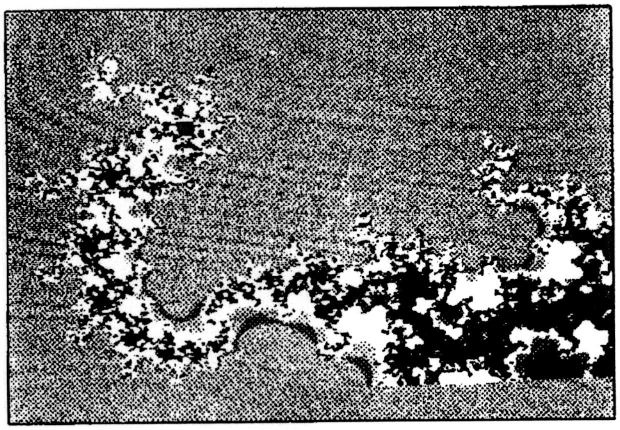

Figura 9c.– Ampliación de 9a

siones, el comportamiento dominante se limita (en el caso de que el sistema cede energía a su ambiente) a conjuntos con una estructura complicada, muchas veces auto-similar, llamada fractal.

Las propiedades detalladas de estas estructuras fractales como ocurren en sistemas dinámicos, son, en gran parte desconocidas. Por otro lado, los fractales que estudiamos en este campo tienen en común que son derivados de alguna iteración sencilla. La iteración que genera el fractal se puede considerar como su receta generatriz. Intituitivamente, si la receta es simple, el objeto mismo debe serlo también. Un objeto que es auto-similar es simple en el sentido de que después de cambiar la escala no aporta información nueva. Parece natural, entonces, que los fractales que ocurren en sistemas dinámicos sean auto-similares. La renormalización es una de las herramientas más apropiadas para estudiar estos conjuntos.

Después de conocer las ideas de renormalización, nuestra intuición nos dice que estos conjuntos deberían ser siempre auto-similares. Lo curioso es que no podemos averiguar esto en todos los casos. Es más, algunos conjuntos, como el conjunto de Mandelbrot (véase la figura 9), parecen más complicados cada vez que lo aumentamos, y así hasta el infinito. El matemático Hubbard ha dicho que este conjunto representa uno de los objetos más complicados que han estudiado los matemáticos hasta ahora. El cree, además, que este tipo de complejidad, dando lugar a formas infinitamente diversas, puede ser un modelo para la complejidad de la vida biológica. La vida es generada por un código genético relativamente sencillo, al estilo de la regla de nuestra iteración.

Autómata celular

Hay otro tipo de sistema que a veces se han propuesto como modelo para generar complejidad a través de un código relativamente sencillo. El ejemplo más sencillo de este "autómata celular" es una fila infinita de células, cada cual tiene un color, por ejemplo, como en la ilustración, blanco y negro.

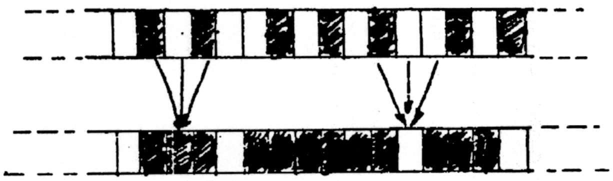

Figura 10a.– Autómata celular

El color de cada célula se puede cambiar cada segundo. El color en la segunda generación depende del color actual de la célula misma y del color actual de sus dos vecinos, uno a cada lado. Esto es análogo a x_2 dependiendo de x_1. La manera en que depende el color de la segunda generación de los de la primera es una regla fija y determinística.

El estudio de este tipo de sistema tiene una profunda relación con la rama de las matemáticas que se llama lógica. Ella nos permite derivar teoremas y proposiciones nuevos de los que ya conocemos. De hecho, con estos sistemas podemos simular la lógica de la manera siguiente.

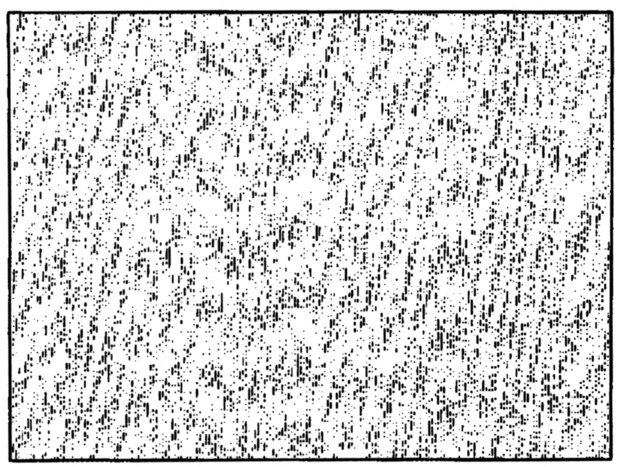

Figura 10b.– Desarrollo temporal de un autómata celular

Cada configuración de la fila de células se puede considerar como una frase. Son frases sencillas, hechas con sólo dos letras distintas: "blanco" y "negro". La configuración inicial juega el papel de axioma. La ley determinística que produce la siguiente frase a partir de la actual se puede considerar como la lógica misma. Visto así, una frase es un teorema si se puede llegar a ella por aplicaciones repetidas de la regla al axioma, que es la configuración inicial.

En el año 1931, el alemán Gödel causó una revolución en la matemática, cuando anunció el siguiente resultado: Si la regla es suficientemente complicada, siempre existen frases cuya verdad (o falsedad) no puede ser probada.

Está claro, que entonces hay frases en nuestro modelo de las cuales nunca podremos verificar matemáticamente si son teoremas o no. Si queremos saber, si ocurrirá una de aquellas frases, no podemos hacer nada más que aplicar la regla tantas veces, que la encontremos o que nos cansemos. No es posible hacer una teoría que dé la respuesta. En particular, es imposible saber si una configuración dará lugar a infinitas frases distintas o sólo a finitas (aunque quizás a muchas). Estas frases cuya ocurrencia no se puede probar se llaman formalmente indecidibles.

Tenemos que vivir con la idea de que no toda pregunta se puede responder matemáticamente, no toda pregunta tiene sentido.

Este fenómeno tan abstracto de la lógica se aplica entonces también a aquellos fenómenos de la naturaleza, que se pueden describir con autómatas celulares.

Un teorema

En los problemas que admiten una solución matemática, los errores no se multiplican. Estos son los problemas sencillos, que llamábamos integrables. Afortunadamente, muchos sistemas en el mundo real se parecen a sistemas integrables. Se puede decir, que esos sistemas representan cambios pequeños de sistemas integrables. Uno de los teoremas más importantes de Sistemas Dinámicos llega a la conclusión de que muchos de ellos se comportan casi como si fueran integrables. En estos casos, aunque los errores pueden crecer, lo hacen de manera muy moderada. Esto, en cierto sentido, nos explica porqué los modelos de Newton podían aproximar el comportamiento del sistema solar con tanta precisión. Este teorema se llama KAM, de acuerdo con las iniciales de los matemáticos rusos Kolmogorov y Arnold y el suizo Moser. (Este teorema se aplica a sistemas que no ceden energía a su ambiente).

Podemos hacer teorías que nos digan qué sistemas todavía se pueden considerar como casi integrables en el sentido previo. Para estos sistemas el caos juega un papel secundario en su movimiento o, dicho de otra manera, se puede predecir su evolución temporal con cierta precisión.

Temperatura

Un gas, el aire por ejemplo, se describe matemáticamente, por una colección de bolas pequeñas que colisionan entre sí. Las ecuaciones que gobiernan este tipo de movimiento son fáciles, pero hay muchas de ellas, tres para cada partícula o cada molécula del gas.

La experiencia diaria nos dice que el aire tiene una cierta temperatura. Temperatura es la energía media de movimientos caóticos, no regulares, de las partículas del gas. Ahora, los físicos han deducido de sus experimentos, que estas moléculas tienen un movimiento caótico. Justamente eso es la hipótesis central de la Mecánica Estadística, que estudia cosas de este tipo.

Una motivación para estudiar sistemas dinámicos es precisamente demostrar esta hipótesis. La idea es que, probando esa hipótesis, la eliminamos como hipótesis. Así reducimos los fenómenos de la Mecánica Estadística, como la temperatura, y los de Sistemas Dinámicos a sus causas comunes, de acuerdo con las ideas mencionadas en el principio de este artículo. A principios de este siglo el matemático Birkhoff enfatizaba este mismo punto de vista.

Los científicos Fermi, Pasta y Ulam seguían con esta línea de pensamiento en los años 50. Con los primeros ordenadores, ellos estudiaron un modelo de un gas consistente en cincuenta moléculas. Esencialmente, lo que hacían era iterar las ecuaciones del movimiento, de manera parecida a la iteración descrita anteriormente en este artículo. La conclusión alarmante de estos científicos fue que el movimiento de las cincuenta moléculas *no* era totalmente aleatorio. *No* se podía hablar de temperatura en el sistema que ellos estudiaban, por no ser totalmente caótico el movimiento.

Hoy en día llegamos a la conclusión que el modelo que ellos investigaban debe ser uno de los casi integrables y por eso no exhibe el comportamiento irregular de un gas real. Queda el problema de demostrar que el sistema correspondiente a un gas real *no* es integrable *ni* casi integrable, lo cual es materia de investigación intensa. En este sentido no hemos llegado aún a un entendimiento completo del concepto de temperatura.

Precisión finita

Después de estos ejemplos surge una imagen clara de la disciplina en discusión. El problema más típico es el crecimiento de los errores de medida, que es la característica principal de comportamiento irregular. En la época de la razón y de las luces el matemático Laplace escribió: "Una mente que en un instante conociera todas las fuerzas y las condiciones iniciales de todos los objetos de la naturaleza, podría condensar en una fórmula todo movimiento en el Universo: para aquella mente nada sería inseguro, y tanto el futuro como el pasado estarían presente ante sus ojos". Sin embargo, ya sabemos que eso no es cierto. Saber la posición inicial con precisión finita implica, que cada predicción sólo vale por un cierto tiempo (la razón es el crecimiento del error). Las palabras del matemático Poincaré, del final del siglo XIX, nos parecen más cercanas: "Es posible que diferencias pequeñas en las condiciones iniciales produzcan diferencias muy grandes al cabo de un cierto tiempo. Un error pequeño en las primeras produce un error enorme en los últimos. La predicción será imposible".

Una de las consecuencias importantes es que no toda pregunta tiene sentido. Pedir una predicción para tiempos indefinidos es, en la mayoría de los casos, pedir lo imposible (argumento pocas veces oído en la discusión sobre la *guerra de galaxias*, que supone la construcción de máquinas que den una protección *perfecta)*. El problema que tiene que resolver el científico es: ¿cuál es la pregunta que tiene sentido? ¿Qué aspectos de la naturaleza se dejan analizar y predecir matemáticamente?

Otros límites

Quizás más profundo aún es el hecho de que la lógica misma nos impide dar respuestas a preguntas formalmente indecidibles. Todavía es desconocido si este tipo de preguntas puede surgir fácilmente en los sistemas que actualmente estudiamos. Sin embargo, el mensaje es el mismo: hacer la pregunta correcta es lo importante.

Muchas veces la ciencia se deja guiar por la intuición geométrica, resultando, por ejemplo, en la idea de la autosimilitud a diferentes escalas o en bifurcaciones. A menudo ha ayudado el ordenador, con el cual podemos aproximar una solución o formarnos una idea de la geometría.

Nuestra intuición geométrica funciona muy bien en dos dimensiones, con figuras en el plano, y, un poco menos, en tres, con figuras en perspectiva. Pero a partir de cuatro dimensiones lo tenemos difícil. Es cierto, que la visualización de construcciones geométricas en cuatro o más dimensiones es difícil o imposible. Uno de los remedios es formalizar lo que sabemos en dos dimensiones en un esquema, para aplicar éste después a dimensiones más elevadas. Lo problemático reside en que la fenomenología en dimensiones elevadas contiene la de dos dimensiones más la suya propia, muchísimo más complicada. Los problemas matemáticos, por lo tanto, son inmensos. Afortunadamente, hay razones para creer que la fenomenología en dos dimensiones es un buen modelo en muchos casos.

Hace unos diez años se consideraba que Sistemas Dinámicos era una de las ramas más prometedoras de la física y de la matemática. Por fin había esperanzas de tener descripciones matemáticas de fenómenos caóticos que tendrían muchas aplicaciones: modelos para el funcionamiento del corazón como sistema dinámico, las epidemias, los tamaños de las ondas cerebrales ("brain-waves"), las órbitas de las partículas en aceleradores grandes, movimientos de robots, reacciones químicas, componentes electrónicos, etcétera. La disciplina sigue siendo prometedora, aunque los problemas de la descripción precisa de los modelos físicos, que normalmente tienen muchas dimensiones, están lejos de ser resueltos completamente. Hay una gran necesidad de técnicas, sean matemáticas o empíricas, en dimensiones elevadas.

Un mundo determinístico

Hay una consecuencia más del estudio de sistemas dinámicos de la que todavía no hemos hablado. Esta es, que no podemos entender la naturaleza solamente con entender sus componentes (partículas o fuerzas) elementales. La síntesis debe ser parte integral de nuestro pensamiento. La complejidad, de que hemos hablado, no se deja descomponer en trozos simples o elementales, sino que es un fenómeno intrínseco de la naturaleza.

En un artículo reciente en la revista Investigación y Ciencia los físicos Crutchfield, Farmer, Packard y Shaw sugirieron que el crecimiento de errores, o caos, puede ser un elemento esencial de la naturaleza. En los modelos matemáticos, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales causan grandes diferencias al cabo de un cierto tiempo. Es un mecanismo que actúa como amplificador de diferencias iniciales. Visto de esa manera, el caos quizás nos aporte una clave para explicar la inmensa variedad de organismos biológicos que existen al cabo de una larga evolución. Más ambiciosa aún es la sugerencia de los mismos autores, de que posiblemente algunos procesos mentales se basan en un sistema caótico que amplifica fluctuaciones pequeñas en el cerebro, hasta que éstas se conviertan en estados coherentes de la mente. Estos estados pueden ser decisiones, pensamientos creativos, sentimientos o recuerdos que surgen sin una causa aparente. Luego puede ser, que el caos sea un modelo de la voluntad libre en un mundo, sin embargo, gobernado por leyes determinísticas.

Agradecimiento: Los autores agradecen a D. Javier Armentia, del Departamento de Física Atómica y Astrofísica de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense por la ayuda prestada en la obtención de las figuras 9a, 9b y 9c del conjunto de Mandelbrot.

Asimismo, agradecemos a Howard Gutowitz, Physics Department, BOX 75, Rockefeller University, New York, por la cesión de la figura 10b. (Desarrollo temporal de un autómata celular).

Referencias:

(1) "The nature and growth of modern Mathematics". E. Kramer. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1982.
(2) "Chaos". J. Gleick. Viking Penguin Inc., New York, 1987.
(3) "Chaos". J.P. Crutchfield et al. Scientific American, December 1986.
(4) "Computer Recreation". A.K. Dewdney. Scientific American, 1985.
(5) "Simple mathematical models with very complicated dynamics". R. May Nature, *261*, 459 (1976).